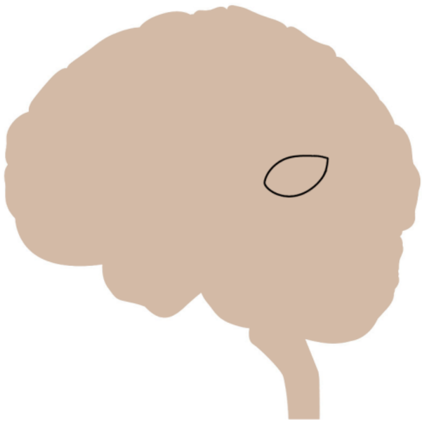
Тренувальна олімпіада зі штучного інтелекту, еволюційної та нейробіології

Розв’язки задач

1. Афазія

Передусім розберемося, яким чином задані ділянки пов'язані між собою з огляду на їхнє геометричне розташування. Ділянки *A* й *D* є симетричними, тобто гомологічними у різних півкулях мозку. А якщо розглянути таку ділянку *E* в лівій півкулі, що є симетричною до ділянки *C* у правій, то ділянка *B* буде сполучати *A* та *E*.



Ділянка E (ліва півкуля мозку)

Кожна з п'яти ділянок має певну функцію, яку частково втрачає при ушкодженні. Залишилося підібрати ці функції так, щоб спостерігалася аналогія у призначенні ділянок *A* та *D*, а також *C* та *E*, а ділянка *B* слугувала допоміжною ланкою для кооперації *A* та *E*:

- Ділянка *E* (вона називається областю Верніке) у лівій півкулі відповідає за розуміння та сприйняття смислових елементів мови. Якщо її ушкоджено, людині важко розуміти те, що їй кажуть.
- Симетрична їй ділянка *C* у правій півкулі відповідає за сприйняття емоцій. При її ушкодженні людині важко сприймати емоційне забарвлення почутого.
- Ділянка *A* (вона називається областю Брока) у лівій півкулі відповідає за висловлювання смислових елементів мови. При її ушкодженні людина продовжує розуміти співрозмовника, але їй стає важко висловлюватися граматично зв'язними реченнями.
- Симетрична їй ділянка *D* у правій півкулі відповідає за вираження емоцій. Після її ушкодження людині важко виражати аспекти емоційного забарвлення.
- Нарешті, ділянка *B* (вона називається arcuate fasciculus) служить ефективним провідником інформації від області, що сприймає мову, до області, що її виражає. Якщо цю ділянку ушкоджено, людині важко повторювати за співрозмовником відносно довгі фрази.

Геометрія розташування ділянок дає ще одну підказку, що могла б допомогти у процесі розв'язування задачі: область Верніке розташована ближче до вуха, а область Брока — ближче до рота, що може свідчити про відповідні їхні призначення.

Зауважимо, що подані в задачі закономірності є лише певним узагальненням реальних фактів. Наприклад, розташування ділянок може дещо відрізнятися від поданого (або бути симетричним до поданого, якщо домінантною півкулею людини є права, а не ліва).

2. Гра у камінці

Алгоритм, яким керується Богдан, однаковий в усіх партіях та є одним із таких, які дозволяють йому гарантовано перемагати за умови, що Алла робить принаймні один неправильний хід. Стратегія Богдана така:

- Якщо кількість камінців на столі не ділиться на 3, він забирає 1 або 2 камінці так, щоб кількість камінців, які залишаться, поділилася на 3.
- Якщо кількість камінців на 3 ділиться, забезпечити собі перемогу неможливо, тому Богдан завжди забирає рівно 1 камінець.

Натомість стратегія Алли щопартії змінюється (принаймні до моменту, поки вона не переможе). Алла застосовує алгоритм самонавчання: якщо в одній з попередніх партій для деякої кількості камінців на столі певний її хід привів до поразки, наступного разу, коли на столі залишатиметься саме така кількість камінців, Алла походить уже інакше. Якщо обидва можливих ходи приводили свого часу до поразки, Алла віддає перевагу найбільш пізній партії і «не повторює своєї помилки» саме в цій партії. Якщо ж дана кількість камінців раніше в жодній з партій під час ходу Алли не траплялася, вона бере 1 камінець.

Як бачимо, особливості стратегії Богдана призводять до того, що починаючи з 15-ї партії Алла починає незмінно вигравати. Але чи міг побудувати Богдан свою гру таким чином, щоб такого моменту часу ніколи не настало? Наприклад, Богдан міг би варіювати кількості камінців, які він забирає, коли кількість камінців на столі ділиться на 3, або навіть час від часу піддаватися Аллі. Покажемо, що виправити ситуацію Богдан не зможе, і, незалежно від його дій, починаючи з певної партії Алла завжди виграватиме.

Зафіксуємо деяку конкретну нескінченну послідовність партій між Аллою та Богданом і методом математичної індукції доведемо таке твердження: якщо кількість камінців n виграшна для гравця, який бере камінці першим, то за всю гру виникала лише скінченна кількість ситуацій, у яких протягом партії на столі опинялося рівно n камінців, у цей момент ходила Алла, але в підсумку вона програвала. Якщо для всіх менших значень кількості камінців твердження вже доведено, для n доводимо його таким чином. Якщо кількість n програшна, доводити нічого не потрібно. Якщо ж кількість n виграшна, Алла може зробити з цієї позиції як виграшний (за умови подальшої оптимальної гри), так і програшний (за умови подальшої оптимальної гри суперника) хід:

- Якщо Алла робить виграшний хід, то або вона одразу виграє, або лишає Богдану позицію, з якої можна зробити тільки програшні ходи (тобто ходи лише у виграшні для Алли позиції). З індукційного припущення тоді випливає, що є лише скінченна кількість партій, у яких Алла зробила з позиції n виграшний хід, але в підсумку програла.
- Нехай кількість партій, у яких Алла робить з n програшний хід і в підсумку програє, нескінченна. Тоді після кожної такої партії вона, згідно з алгоритмом своєї гри, робить у наступній такій партії інший (виграшний) хід, і цих ситуацій також буде нескінченна кількість. Отже, з якогось моменту Алла почне в таких ситуаціях постійно вигравати, а значить, перестане робити програшний хід. Дістали суперечність.

3. Група крові

Спосіб реалізації гена (у нашому випадку — АА, АО чи ОО) називається генотипом. Спершу доведемо таке твердження: за умови випадкового схрещування розподіл у популяції генотипів та частота окремих алелів (у нашому випадку — А та О) є сталими з покоління в покоління. Це твердження називається законом Гарді — Вайнберґа (Hardy–Weinberg).

Позначимо частоту генотипів (імовірність зустріти індивіда з даним генотипом) АА, АО та ОО через aa, ao та oo відповідно, а частоти окремих алелів А та О через A та O. Зауважимо, що, відповідно до означення, $aa + ao + oo = 1$, $A + O = 1$, $A = aa + \frac{ao}{2}$, $O = oo + \frac{ao}{2}$. Розглянемо можливі варіанти генотипів дітей залежно від батьківських (у дужках вказано частоти даного генотипу):

	АА (aa)	**АО (ao)**	**ОО (oo)**
АА (aa)	АА (aa^2)	АА ($aa \cdot ao/2$), АО ($aa \cdot ao/2$)	АО ($aa \cdot oo$)
АО (ao)	АА ($aa \cdot ao/2$), АО ($aa \cdot ao/2$)	АА ($ao^2/4$), АО ($ao^2/2$), ОО ($ao^2/4$)	АО ($ao \cdot oo/2$), ОО ($ao \cdot oo/2$)
ОО (oo)	АО ($aa \cdot oo$)	АО ($ao \cdot oo/2$), ОО ($ao \cdot oo/2$)	ОО (oo^2)

Тепер порахуємо сумарні частоти генотипів нового покоління:

Генотип	**Сумарна частота**
АА	$aa^2 + \frac{aa \cdot ao}{2} + \frac{aa \cdot ao}{2} + \frac{ao^2}{4} = \left(aa + \frac{ao}{2}\right)^2 = A^2$
АО	$\frac{aa \cdot ao}{2} + aa \cdot oo + \frac{aa \cdot ao}{2} + \frac{ao^2}{2} + \frac{ao \cdot oo}{2} + aa \cdot oo + \frac{ao \cdot oo}{2} = 2\left(aa + \frac{ao}{2}\right)\left(oo + \frac{ao}{2}\right) = 2AO$
ОО	$\frac{ao^2}{4} + \frac{ao \cdot oo}{2} + \frac{ao \cdot oo}{2} + oo^2 = \left(oo + \frac{ao}{2}\right)^2 = O^2$

Сумарні частоти окремих алелів не змінилися:

Алель	Сумарна частота
A	$A^2 + \frac{2AO}{2} = A(A+O) = A$
O	$O^2 + \frac{2AO}{2} = O(A+O) = O$

Частоти генотипів другого покоління стали рівними A^2, $2AO$ та O^2 — вони залежать лише від частот алелів, а не від конкретного розподілу генотипів у першому поколінні. Це означає, що й у кожному наступному поколінні розподіл генотипів буде саме таким (хоча у початковому поколінні він міг бути й іншим).

Твердження доведено. Крім того, з ходу доведення ми отримали співвідношення на розподіл у популяції генотипів та окремих алелів: $aa = A^2$, $ao = 2AO$, $oo = O^2$. Тоді маємо:

$$aa = A^2 = (1-O)^2 = \left(1-\sqrt{oo}\right)^2 = \left(1-\sqrt{0{,}73}\right)^2 \approx 0{,}021.$$

Отже, відповідь — 2,1 %.