

Олімпіада зі штучного інтелекту,
еволюційної та нейробіології

30 травня 2016 р.

Розв'язки задач

1. Природа: мозок

Симетричні області у звивинах відповідають за відчуття (зліва) та рух (справа) одного й того самого органа. Порядок областей відповідає перегорнутому розташуванню органів у тілі: ноги, руки (кисть, пальці від малого до великого), голова (зуби, рот, горло).

Завдання 1.

- 1) рух великого пальця руки — **G**,
- 2) відчуття у кисті руки — **A**,
- 3) ковтання — **H**,
- 4) рух пальців ноги — **E**,
- 5) зуби — **C**,
- 6) відчуття у мізинці (руки) — **B**,
- 7) рух кисті руки — **F**,
- 8) відчуття у горлі — **D**.

Завдання 2.

- а) відчуття у пальцях ноги — у звивині зліва **симетрично до E**,
- б) рух вказівного пальця — **безпосередньо над G**.

Завдання 3.

- в) слиновиділення — **над H**.

2. Природа: генетика

При випадковому схрещуванні розподіл генотипів може змінитися, але розподіл кількостей індивідуальних алелів лишається тим самим, що й до схрещування: див., наприклад, розв'язок задачі тренувальної олімпіади про групи крові. Крім того, у генотипах покоління нащадків алелі перемішуються рівномірно й утворюють усі можливі пари з відповідними ймовірностями. Отже:

- Заміна випадкової квітки на білу означає заміну двох випадкових алелів (з 4032) на два алеля W.
- Заміна випадкової квітки на рожеву означає заміну двох випадкових алелів на алель W та алель R.
- Заміна двох випадкових квіток на рожеву та червону означає заміну чотирьох випадкових алелів на три алеля R та один алель W.

Можна показати математично (хоча це й не вимагається в контексті олімпіади), що при багаторазовому повторенні однієї з подібних операцій співвідношення кількостей алелів W та R у загальному наборі з 4032 алелів буде прямувати до цього ж співвідношення у наборі алелів, який ми використовуємо для заміни:

- При заміні двох алелів на W + W усі алелі в підсумку стануть алелями W, а всі **2016** квіток — білими.
- При заміні двох алелів на W + R початкове співвідношення алелів 1 : 1 лишатиметься незмінним (завжди коливатиметься навколо цього відношення), а кількість білих квіток, відповідно, лишатиметься рівною **504**.
- Заміна чотирьох алелів на W + R + R + R приведе співвідношення алелів до величини 1 : 3 (і коливатиметься навколо цього відношення), а кількість білих квіток — квіток із генотипом WW — дорівнюватиме $2016 \times (1/4)^2 = 126$.

3. Математика: еволюція стратегії

Методом математичної індукції покажемо, що переможцем k -го покоління буде гравець, який бере 2 камінці тоді й лише тоді, коли кількість камінців на столі дорівнює $3s - 1$ для $s < k$ (позначимо такого гравця як W_k). Для першого покоління твердження тривіальне. Нехай тепер твердження доведене для k -го покоління; доведемо його для $(k + 1)$ -го.

Нехай $k \leq 33$. Тоді, по-перше, гравець W_{k+1} існує серед $(k + 1)$ -го покоління, оскільки утворюється з гравця W_k шляхом заміни в генотипі однієї з одиниць на двійку на відповідній позиції — позиції, що відповідає кількості камінців $3k - 1$. По-друге, цей гравець виграє турнір, адже перемаже в усіх партіях кожного свого суперника; доведемо це, розглянувши довільну партію. Оскільки за хід зі столу зникає не більше ніж два камінці, у якийсь момент на столі опиниться рівно $3k - 1$ або рівно $3k$ камінців:

- Якщо на столі $3k - 1$ камінець і зараз хід гравця W_{k+1} , він починає грати за оптимальною стратегією, щоразу лишаючи після свого ходу кількість камінців, кратну 3.
- Якщо на столі $3k - 1$ камінець і зараз хід суперника, суперник забере один камінець, адже W_{k+1} є єдиним гравцем свого покоління з двійкою на відповідній позиції. Тоді W_{k+1} заграє за оптимальною стратегією, починаючи з кількості камінців $3k - 2$.
- Якщо на столі $3k$ камінців і зараз хід W_{k+1} , він забере один камінець, що зведе ситуацію до переднього випадку.
- Якщо на столі $3k$ камінців і зараз хід суперника, він забере один чи два камінці, після чого W_{k+1} починає діяти за оптимальною стратегією.

Нехай тепер $k \geq 34$. Розділимо гравців на дві категорії: «оптимальних» — гравця $W_k = W_{k+1}$, якого позначимо просто як W , і 33 гравців, у яких мутація відбулася на позиціях, що відповідають кількостям камінців, кратним 3, — та «неоптимальних», тобто інших 66 гравців. Доведення проведемо у кілька кроків:

1. W виграє не менше партій, ніж будь-який інший оптимальний гравець O . Справді: між собою W та O зіграють 1:1; якщо W або O починають партію з якимось третім гравцем P , вони обидва її виграють; якщо ж вони ходять другими і W програє, а O виграє, то це означає, що у гравця P відбулася мутація на дві позиції правіше від O . З іншого боку, існує гравець P' , у якого мутація відбулася на одну позицію правіше від O . Такий гравець програє W , але виграє в O .
2. Отже, W не програє турнір іншому оптимальному гравцю, адже має з-поміж них найменший генотип.
3. W набере не менше очок, ніж будь-який неоптимальний гравець N , у партіях з іншими гравцями: він не програє жодної партії, в якій ходить першим, а якщо програє партію, в якій ходитиме другим, то й N робитиме точно ті самі ходи, що W , і програє також.
4. Якщо N має мутацію на місці, що відповідає кількості камінців $3s - 1$, то W виграє у нього обидві партії й набере більше очок; якщо натомість N зазнав мутації на позиції, що відповідає кількості камінців $3s - 2$, то має більший за W генотип. Отже, W не програє турнір і неоптимальному гравцю. Значить, W турнір виграє.

4. Математика: графічне розпізнавання

Необхідними і достатніми умовами того, що на сітківці зображено квадрат $t \times t$, є такі: у t послідовних рядках міститься по t зафарбованих клітин, а в інших — жодної; у t послідовних стовпцях міститься по t зафарбованих клітин, а в інших — жодної. Перевірити ці умови за допомогою нейронної мережі можна, наприклад, так:

- 1) Один модуль мережі (модуль I) рахує сумарні кількості зафарбованих клітин у кожному з рядків. Обійти обмеження на кількість сполучень тут і далі можна, будуючи дерево, кожен рівень якого опрацьовує дані на кількох (наприклад, двох) попередніх рівнях і повертає результат наступному рівню.
- 2) Модуль II над модулем I рахує кількість пар сусідніх рядків, у яких кількості зафарбованих комірок виявилися різними. При цьому перед першим рядком і після останнього слід додати два фіктивних рядки без зафарбованих клітинок.
- 3) Модуль III над модулем I рахує максимальну кількість зафарбованих клітинок, які трапляються в одному рядку.
- 4) Модуль IV над модулем I рахує кількість ненульових рядків.
- 5) Модуль V над модулями II, III і IV перевіряє, чи кількість, порахована модулем II, виявилася рівною 2, а числа, що повернули модулі III і IV, однакові.
- 6) Модулі VI—X виконують ті самі операції для стовпців.
- 7) Модуль XI, що є кінцевим нейроном, перевіряє, чи обидва модулі V і X повернули позитивний результат. Для того, щоб синхронізувати надходження сигналів (тут і в попередніх пунктах), слід додавати на їхньому шляху додаткові проміжні нейрони, що штучно затримуватимуть швидший із сигналів.

5. Експеримент: нюх

Експеримент мав на меті з'ясувати поріг чутливості людини до складових запаху та полягав у тому, що піддослідним пропонували нюхати три суміші: дві однакові й третю, що відрізнялася від них одним чи кількома компонентами. Результатом одного такого досліджу була кількість людей, що вгадували, котра з сумішей відмінна від двох інших.

Додатково кожен суміш розчиняли у пропіленгліколі, щоб забезпечити відсутність впливу на результати експерименту сили запаху (на противагу його *якості*): в одному досліді три суміші розчиняли у трьох заданих пропорціях «1/4», «1/2» та «—», розставляючи ці пропорції випадковим чином. Якщо навпроти суміші вказано два значення пропорції, вона була однією з двох однакових, інакше — третьою.

Усього в досліді брало участь 26 людей. Число-результат, що відповідає суміші, — це кількість людей з числа 26 піддослідних, що вказали на дану суміш як на відмінну від двох інших.

- Суміші 5 і 7 відрізняються усіма 10 своїми компонентами, тобто мають дуже різні запахи. Правильну відповідь (те, що відрізняється суміш 7) назвали майже всі піддослідні — 22 людини; решта 4 вказали на суміш 5.
- Суміші 3 і 6 мають 7 різних компонентів. Правильну відповідь (те, що відрізняється суміш 6) вказали 18 піддослідних; решта 8 назвали зайвою суміш 3.
- Суміші 2 і 4 відрізняються 4 компонентами. Правильну відповідь (те, що третьою є суміш 2) назвали стільки ж людей, скільки й неправильну (те, що відрізняється суміш 4) — по 13.
- Суміші 1 і 8 відрізняються 1 компонентом, тобто пахнуть практично однаково. Тож і відповіді піддослідних мали випадковий характер: третина — 8 людей — назвали правильну відповідь (відрізняється суміш 1), а решта — 18 людей — не вгадали (вказавши, що відрізняється суміш 8).

Отже, відповідь до **завдання 1**: 8, 13, 8, 13, 4, 18, 22, 18.