

Хокейний турнір

У хокейному турнірі зіграють N команд; щоправда, точна величина N поки що не відома. Кожна команда має деякий рівень гри, і коли дві команди грають між собою, обов'язково виграє та, рівень гри якої є вищим (нічий при цьому не буває). Мета турніру — впорядкувати всі команди за їхнім рівнем гри.

Директор хокейної ліги стверджує, що завжди зможе провести турнір таким чином, що кількість матчів лінійно залежатиме від кількості команд. Інакше кажучи, існує таке стале число C (хоч би й велике), що незалежно від величини N кількість матчів, які необхідно провести для визначення порядку команд, не перевищуватиме добутку $C \times N$. При цьому директор може зводити між собою будь-які пари команд у будь-якому порядку і призначати матчі залежно від результатів ігор, що вже відбулися.

Завдання 1. Доведіть, що в загальному випадку директор помиляється.

Завдання 2. Доведіть, що директор має рацію у випадку, якщо раніше всі команди було розбито на дві групи і в кожній із них уже відоме відносне розташування команд.

Розв'язок

Завдання 1. Усього існує $N!$ варіантів впорядкування N команд. Матч між командами A та B розбиває усі можливі на даний момент варіанти на дві частини: ті, в яких команда A розташована перед B , і ті, в яких після. Результат такого матчу дозволяє відсіяти одну з цих двох множин варіантів, але не дає жодної додаткової інформації. Таким чином, у найгіршому для директора випадку кожен матч відсіюватиме не більше ніж половину всіх можливостей, а $C \times N$ матчів зменшать кількість варіантів лише до величини $N!/2^{CN}$. Тепер достатньо довести, що ця величина стає як завгодно великою зі збільшенням N : тоді за $C \times N$ ігор директор не зможе встановити єдино можливого порядку для команд.

Щоб довести, що $f(N) = N!/2^{CN}$ набуває як завгодно великих значень, достатньо зауважити, що для $N \geq 2^{C+1}$ справджується співвідношення $f(N+1) \geq 2f(N)$, тому щонайменше починаючи з цього місця послідовність необмежено зростає.

Завдання 2. Щоб визначити найсильнішу з усіх команду, проведемо матч між лідерами двох груп. Другу в загальному списку команду можна визначити, провівши матч між найсильнішими командами груп, крім тієї, яку вже поставлено на перше місце. Подібним чином діятимемо і далі: щоб з'ясувати, яка команда посідає наступне в таблиці місце, проводимо матч між двома найсильнішими командами з різних груп, які залишаються на даний момент поза таблицею. Якщо у деякий момент з'ясується, що всі команди, які залишаються, належали одній і тій самій групі, турнір можна завершити, а всі ці команди додати в кінець турнірної таблиці у тому ж порядку, в якому вони йшли у таблиці своєї групи.